ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
HỆ THPT CHUYÊN NĂM 2011

HƯỚNG DẪN GIẢI MÔN THI TOÁN (Vòng 2)

Câu I. 1) Điều kiện $0 \le x \le 1$, phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}(\sqrt{1-x}+1)=1 \Leftrightarrow 3(\sqrt{1-x}+1)=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$$

Nếu $0 \le x < 1 \Rightarrow 3\left(\sqrt{1-x}+1\right) > 3$ đồng thời $\sqrt{x}+\sqrt{x+3} < \sqrt{1}+\sqrt{4}=3$

Suy ra VT > VP. (loại).

Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm.

2) $x=y=0$ là nghiệm. Xét $x \ne 0, y \ne 0$ hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \ (1) \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(2+\dfrac{2}{xy}\right)=8(2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta thu được $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^3=8 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{1}{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Câu II.

1) Ký hiệu $K=\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]$, do $n>1 \Rightarrow K \ge 1$. Ta có:

$$K \le \sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3} < K+1 \Leftrightarrow (K-\frac{1}{3})^3 \le n-\frac{1}{27} < (K+\frac{2}{3})^3$$

$$\Leftrightarrow K^3-K^2+\frac{K}{3}-\frac{1}{27} \le n-\frac{1}{27} \le K^3+2K^2+\frac{4}{3}K+\frac{8}{27}$$

$$\Leftrightarrow K^3+\frac{K}{3} \le n+K^2 < K^3+3K^2+\frac{4}{3}K+\frac{1}{3} \Leftrightarrow K^3 < n+K^2 < (K+1)^3$$

Suy ra $n+K^2=n+\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{27}}+\dfrac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

2) Ta có:

$$\sqrt{6\left(x^2+5\right)}+\sqrt{6\left(y^2+5\right)}+\sqrt{z^2+5}=\sqrt{6(x+y)(x+z)}+\sqrt{6(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}$$

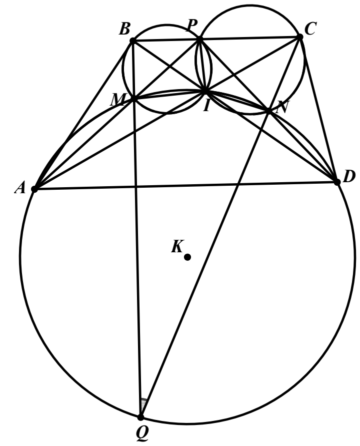
$$\le \frac{3(x+y)+2(x+z)}{2}+\frac{3(x+y)+2(y+z)}{2}+\frac{(z+x)+(z+y)}{2}\le \frac{9x+9y+6z}{2}=\frac{3}{2}(3x+3y+2z)$$

Suy ra $P=\dfrac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}\ge \dfrac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1, z=2$.

Vậy $P_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

Câu III.

1) Tứ giác $BPIM$ nội tiếp và $AD//BC \Rightarrow \widehat{MAD}=\widehat{BPM}=\widehat{BIM} \Rightarrow$ tứ giác $AMID$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $DNIA$ nội tiếp. Vậy năm điểm A, M, I, N, D thuộc một đường tròn (K)



2) Do các tứ giác $BPIM$ và $CPIN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{QMI}=\widehat{BPI}=\widehat{C}$

$\Rightarrow$ tứ giác $MINQ$ nội tiếp.

Mà $M, I, N \in (K) \Rightarrow$ Tứ giác $MINQ$ nội tiếp đường tròn (K).

Vậy Q thuộc đường tròn (K) (đpcm)

3) Khi P, I, Q thẳng hàng, kết hợp với Q thuộc đường tròn (K) ta có:

$\widehat{AIQ}=\widehat{PIC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{PIC}=\widehat{PNC}$ (do tứ giác $NIPC$ nội tiếp)

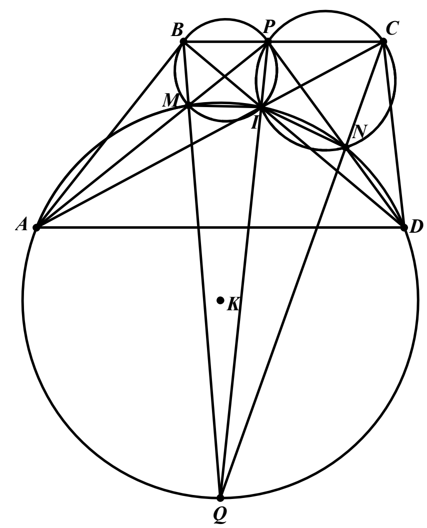
$\widehat{PNC}=\widehat{QND}$ (đối đỉnh)

$\widehat{QND}=\widehat{QID}$ (do tứ giác $INDQ$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{AIQ}=\widehat{QID}$

$\Rightarrow IQ$ là phân giác $\widehat{DIA}$ nên IP là phân giác góc $\widehat{BIC}$.

Do đó $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{IB+ID}{IC+IA}=\dfrac{BD}{AC}\Rightarrow \dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{CA}$ (đpcm)



Câu IV. Giả sử A có n số, chúng ta xếp chúng theo thứ tự $1=x_1<x_2<x_2<\cdots\cdots<x_n=100\,(1)$

Suy ra với mỗi $k\in\{1,2,3,\ldots,n-1\}$ ta có $x_{k+1}=x_i+x_j\le x_k+x_k=2x_k\,(2)$ với $1\le i,j\le k$.

Áp dụng kết quả (2) ta thu được $x_2 \le 1+1=2, x_3 \le 2+2=4, x_4 \le 8, x_5 \le 16,$

$x_6 \le 32, x_7 \le 64.$ Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.

+) Giả sử $n=8 \Rightarrow x_8 = 100$.

Vì $x_6 + x_7 \le 32+64=96 \Rightarrow x_8 = 2x_7 \Rightarrow x_7 = 50.$

Vì $x_5 + x_6 \le 16+32=48 \Rightarrow x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 25.$

Vì $x_4 + x_5 \le 8+16=24<25 \Rightarrow x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = \frac{25}{2}$ (mâu thuẫn).

+) $n=9$ ta có tập $\{1,2,3,5,10,20,25,50,100\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Đáp số: $n=9$

Nguồn: Hocmai.vn